Universidade Cruzeiro do Sul

Pró-reitoria de
Pós-graduação e Pesquisa

# Produto Educacional

## Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

# A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE RAZÃO E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS SOB A PERSPECTIVA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE DUVAL

ELI FERREIRA DOS SANTOS

# A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE RAZÃO E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS SOB A PERSPECTIVA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE DUVAL

**Eli Ferreira dos Santos**
**Suzete de Souza Borelli**

# A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE RAZÃO E SEMELHANÇA DE TRIANGULOS SOB A PERSPECTIVA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE DUVAL

**Universidade Cruzeiro Do Sul**
**2023**

Universidade Cruzeiro do Sul
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática

**Reitora da Universidade Cruzeiro do Sul –** Profa. Dra. Amélia Maria Jarmendia.

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
**Pró-Reitor –** Profa. Dra. Tania Cristina Pithon-Curi

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
**Coordenação -** Profa. Dra. Norma Suely Gomes Allevato

**Banca examinadora**
Dra. Suzete de Souza Borelli
Dra. Priscila Bernardo Martins
Dra. Katia Lima

Ficha catalográfica a ser elaborada pela Biblioteca

# Sumário

# 1 APRESENTAÇÃO

Este produto educacional é parte integrante da dissertação de Mestrado Profissional intitulada de: ***"A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE RAZÃO E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS SOB A PERSPECTIVA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE DUVAL",*** desenvolvida por Eli Ferreira dos Santos, sob a orientação da prof.ª Dr.ª Suzete de Souza Borelli. Teve por objetivo investigar as potencialidades da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas para a aprendizagem de Razão e Semelhança de Triângulos. Mostrar como o ensino, a aprendizagem e a avaliação ocorrem de maneira simultânea na resolução de problemas geométricos de Razão e Semelhança de Triângulos, juntamente com as interações proporcionadas com o uso do *software Geogebra* referenciadas pelas Representações Semióticas de tratamento e conversão de Duval. A sequência didática foi aplicada em uma turma do 9º ano dos anos finais do ensino fundamental de uma escola pública da cidade de São Paulo.

## 1.1 *Conversa com o Professor*

Um dos grandes desafios dos professores que ensinam matemática é planejar atividades que garantam efetivamente a aprendizagem dos alunos. Diante dessa preocupação, o trabalho docente requer constantes reflexões sobre qual é o papel do professor no processo de ensino e aprendizagem e como isso reflete na elaboração de seus procedimentos de ensino se perguntando:

- Como abordar os conteúdos de matemática que façam sentido para os alunos?
- Como verificar as evidências de aprendizagem, na aquisição das habilidades exigidas para a formação escolar?
- Como observar e analisar as atividades realizadas pelos alunos?
- Como ser mediador entre o conhecimento elaborado ao longo da história e os conhecimentos já adquiridos pelos alunos, levando em consideração o conteúdo planejado?

Para esses questionamentos, elaboramos uma sequência didática para contribuir com a aprendizagem dos alunos e ajudar os professores com uma proposta que permita refletir sobre as dificuldades enfrentadas nos processos de ensino, de aprendizagem e de avaliação da Matemática.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 *A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação*

"Nessa Metodologia, o problema é o ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos matemáticos" (Onuchic, Allevato, 2021, p. 47). As autoras sugerem dez etapas para o professor utilizar essa metodologia em sala de aula, como demonstrado na figura a seguir:


Fonte: Onuchic, Allevato (2021)

Vamos compreender melhor essas etapas apresentadas pelas autoras:

**1. *Proposição do problema*:** Pode ser feita tanto pelos alunos quanto pelo professor e, este problema é que desencadeia todo o processo de construção, chamado de problema gerador. É fundamental que o conteúdo ou o conceito que será abordado, ainda não tenha sido tratado ou apresentado em sala de aula.

**2. *Aluno desafiado a utilizar os seus conhecimentos prévios*:** Inicia com uma leitura individual que será realizada pelo aluno, ou seja, o estudante recebe o problema e fará a sua primeira aproximação com o problema gerador, sem nenhuma intervenção do professor. A ideia é que o estudante possa explorar este problema com os conceitos e ou conteúdos de que dispõem.

**3. *Em pequenos grupos alunos discutem e aprimoram compreensões*:** Em seguida, será realizada uma leitura em pequenos grupos, para que possam refazer a leitura e começarem a fazer uma discussão do que descobriram, do que se busca no problema, qual caminho que foi pensado pelos participantes para solucionar o problema. Nesse momento o professor começa a assumir o seu papel de mediador, tirar dúvidas, ajudar na escrita das ideias matemáticas que muitas vezes aparecem em linguagem oral para a passagem da linguagem matemática, pode ajudar a levantar os conceitos que aparecem no problema. Enfim, sempre fazendo questionamentos que intervenha para ampliar a compreensão da situação apresentada.

**4. *Professor incentiva e observa*:** O professor continua exercendo o seu papel de mediador da aprendizagem, observa o desenvolvimento dos alunos, faz indicações de conhecimentos que possam incentivá-los a utilizarem seus conhecimentos que possuem, fazendo os registros em linguagem matemática ou outros recursos que disponham para ser utilizado nesta situação.

**5. *Alunos em grupos resolvem o problema*:** Depois de toda a discussão sobre o problema, os alunos, ainda nos seus grupos, em um processo colaborativo, buscam solucionar a situação proposta. Durante este percurso de resolução, o estudante será conduzido para a construção do conhecimento que o professor havia previsto para a condução daquela aula.

**6. *Alunos apresentam soluções*:** Depois da resolução nos pequenos grupos, independentemente de estar certo ou errado, os representantes de cada grupo apresentam seus registros. Além de mostrar o percurso desenvolvido e explicando o que pensaram em cada etapa da solução, este é um momento de interação, onde ocorrerá a construção do conhecimento sobre o conteúdo, mas também será o espaço para melhoria dos registros, da leitura, da escrita e da comunicação.

**7. *Em plenária, professor e alunos argumentam, discutem ideias e concepções*:** É o momento em que o professor e os alunos socializam suas percepções, dificuldades e as descobertas que foram feitas durante o processo para encontrar a solução. O professor tem o papel fundamental para que os alunos possam expor tudo o que aprenderam de modo a explicitar o processo que foi realizado, individualmente e em grupo. Podendo perceber os erros, comparando soluções, e desenvolvendo formas de argumentação, melhorando assim seus processos de comunicação Matemática.

**8. *Busca-se um consenso sobre os processos de resoluções*:** A partir de todo esse processo de discussão, os alunos, juntamente com o professor, possam chegar a consensos sobre a resolução mais apropriada para aquela situação. Essa resolução precisa ser compreendida por todos e será o momento de possível aprimoramento da linguagem Matemática, fundamental para a ampliação do conhecimento dos estudantes sobre o tema escolhido.

**9. *Professor formaliza o conteúdo matemático*:** O professor, nessa etapa fará o registro formal do que foi planejado para a aula, até a chegada no consenso da turma, a partir do problema gerador. Identifica propriedades e as definições, sintetiza as informações em linguagem Matemática, os procedimentos e as técnicas operatórias que foram utilizadas conforme o que foi planejado. O problema gerador é que tem a função de mobilizar o processo de aprendizagem dos alunos, trazendo as definições e a formalização da linguagem Matemática para o final, quer dizer, apresentar todos os aspectos formais somente depois da construção de sentido pelos estudantes.

**10. *Proposição de novos problemas*:** Esta etapa configura o fechamento de todo o ciclo da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. Após os grupos de alunos proporem extensões do problema gerador e ou novos problemas, o próprio grupo resolve ou o professor distribui esses problemas para outros grupos resolverem.

Assim, a aplicação dessa etapa oportuniza aos alunos colocar em prática aquilo que conseguiram aprender individualmente e em grupo. Para o professor, fornece elementos para avaliar o alcance das aprendizagens naquele conteúdo e em situações diversas que envolvam outros conteúdos que podem surgir. Para a escolha do momento da aplicação dessa etapa, o professor deve levar em consideração as dificuldades dos alunos, aliada com a intencionalidade da proposta de ensino por tal conteúdo.

Sendo assim, a aplicação dessa Metodologia abre espaço para o protagonismo do aluno de forma consciente, mobilizando conceitos e formas de relacioná-los.

## 2.2 *O ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL*

Nossa escolha pela Geometria advém por consideramos essencial para situar o aluno no espaço em que vive, observando as relações com os objetos e as suas aproximações que ela permite fazer dentro da Matemática. Ao observar as formas geométricas dos objetos, o aluno estará colocando em uso os conteúdos aprendidos em sala de aula de modo contextualizado e dinâmico. Isto também pode ser confirmado pela (BNCC, 2018, p. 271) que aponta: "A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento". O ensino da Geometria nos anos finais indicado por esse mesmo documento, apresenta uma ideia de complementaridade e continuidade, sendo estudado em todos os anos do Ensino Fundamental, mostrando assim a sua relevância para a formação do aluno.

### 2.2.1 *A Razão e Semelhança de Triângulos*

O conteúdo de Razão e Semelhança de Triângulos pertence a Geometria Plana. Conhecer esse conteúdo e o seu modo de ensinar faz parte do ofício do professor que ensina Matemática.

**Os conceitos de Razão e Semelhança de Triângulos Razão**

***Razão***

A Razão entre dois números a e b, com b ≠ 0, nessa ordem, é dado por $\frac{a}{b}$.

### *Razão de Semelhança*

"Sendo K a razão entre os lados homólogos".

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

k é chamado de razão de semelhança dos triângulos.

Se k = 1 os triângulos são congruentes (Iezzi *et al.* 1977-1984, v. 9, p. 164).

### *Semelhança de Triângulos*

"Dois triângulos são semelhantes, se e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais". (Iezzi et al 1977-1984, pág.163).

Para consultar essa demonstração de forma dinâmica no *Geogebra*, acessar o link na página do pesquisador em: https://www.geogebra.org/m/tqrhqbhm.

### *Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos*

"Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro" (Iezzi *et al* 1977-1984, pág.165).

### *Casos ou Critérios de Semelhança*

***1º Caso:*** *ALA - Ângulo Lado Ângulo*

"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes". (Iezzi *et al.* 1977-1984, v. 9, p.167)

Hipótese TESE

$\triangle ABC, \triangle A'B'C' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

$A \equiv A' \quad B \equiv B'$

Para consultar essa demonstração de forma dinâmica no *Geogebra*, acessar o link na página do pesquisador em https://www.geogebra.org/classic/wg7dnnbg.

***2º Caso:*** *LAL - Lado Ângulo Lado*

> "Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes". (Iezzi *et al.* 1977-1984, v. 9, p.170).

A demonstração é análoga à do 1º caso, usando o caso de congruência LAL (em lugar de ALA) e o teorema fundamental. Para consultar essa demonstração de forma dinâmica no *Geogebra*, acessar o link na página do pesquisador em: https://www.geogebra.org/m/rx5qtdwd.

***3º Caso****: LLL - Lado Lado Lado*

> "Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes". (Iezzi *et al*. 1977-1984, v. 9, p.170).

A demonstração é análoga à do 1º caso, usando o caso de congruência LLL (em lugar de ALA) e o teorema fundamental. Para consultar essa demonstração de forma dinâmica no *Geogebra*, acessar o link na página do pesquisador em: https://www.geogebra.org/m/ndjffgmg.

### 2.2.2 *O Uso da Tecnologia no Ensino de Geometria - O Geogebra em Foco*

O uso das tecnologias digitais nas aulas de Matemática é indicado pela (BNCC, 2018, p. 9) "[...] compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica". Essa indicação demonstra a relevância e evidencia a ideia de que o uso das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) colabora para a inserção do aluno na sociedade e o seu uso nas aulas de Matemática. O uso de um *software* como o *Geogebra* pode trazer vivacidade e dinamismo nas construções algébricas e geométricas, o que não pode ser observado nos livros e materiais didáticos impressos por serem construções estáticas e também como algo pronto e acabado.

Enfatizamos a importância do uso das ferramentas tecnológicas digitais no processo de ensino e aprendizagem. Concordamos com Santos (2021), sobre o uso do *Geogebra* e ressalta:

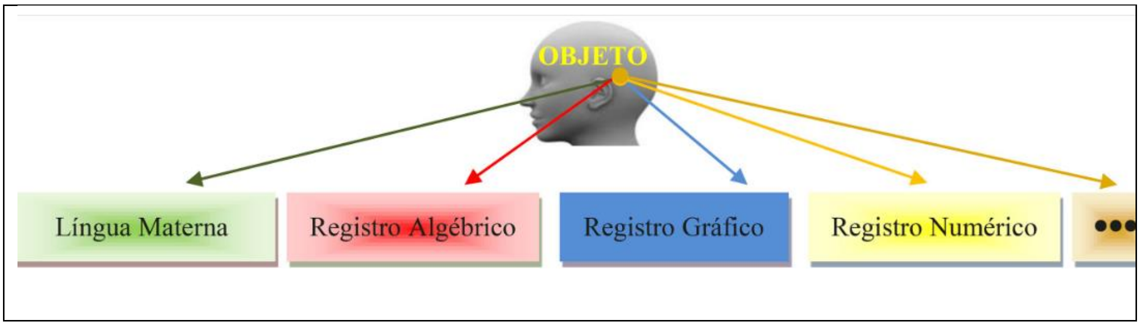
> Nesse software, cria-se várias possibilidades de ensinar e aprender de forma dinâmica aquilo que poderia levar um tempo muito maior de execução utilizando o caderno, a régua, o transferidor e o compasso, por exemplo. Por consequência, acarreta-se a perda de informações para análise de figuras geométricas devido às imperfeições. Tal software proporciona ao professor e ao aluno agilidade e interação na construção de objetos, dedicando maior tempo no desenvolvimento do raciocínio lógico, nas habilidades e nas competências necessárias para a execução e implementação das atividades. (Santos, 2021, p. 184).

Para o autor, o uso de tal *software* nas aulas ampliam os recursos de ensino e de aprendizagem, facilitando as construções das figuras geométricas, tanto quanto a sua visualização e compreensão. O *Geogebra* oferece uma gama de ferramentas para essas construções, mostrando a resolução algébrica e geométrica de forma simultânea. A resolução simultânea amplia a compreensão das relações entre as várias representações possíveis de serem realizadas, diferentemente das representações realizadas de forma isolada, ora pela álgebra, ora pela própria Geometria.

Sendo assim, é importante reconhecer o potencial pedagógico ao utilizar o *software Geogebra* na interação entre a situação problema e o resolvedor.

## 2.3 *AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE DUVAL*

As representações semióticas trazem a importância dos registros das representações, dos signos e caracteres para codificação e como essas representações influenciam na aprendizagem dos alunos. Um signo é tudo aquilo que representa algo para alguém, permitindo criar na mente dela, algo que lhe faça sentido.  O signo representa não todo o objeto em si, mas uma referência desse objeto, trazendo um sentido para ele, (Henriques, Almouloud, 2016). Para isto é preciso entender melhor quais são os registros que os alunos podem realizar adotando diferentes signos. Vejamos a figura a seguir:




Fonte: Henriques, Almouloud, 2016, p. 2.

A ilustração acima mostra possíveis registros que os alunos podem realizar quando abordam diferentes representações do mesmo objeto. Para (Duval, 2009, p. 31) “A noção de representação torna-se, então, essencial como forma sob a qual uma informação pode ser descrita e considerada em um sistema de tratamento”. As representações semióticas retratam as transformações de tratamento e conversão.

O tratamento é uma transformação da representação interna de um registro e a conversão é uma transformação externa. “Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em outro registro” (Duval, 2009, p. 58). Isso gera implicações para o ensino, uma vez que o aluno estabelece diferentes representações de um mesmo objeto de conhecimento estudado. O professor ao ensinar, é essencial conduzir o aluno a perceber que as transformações de um mesmo objeto requerem evidenciar os conceitos que podem ser vistos nas diferentes representações, observando que elas não se apresentem de forma mecânica.

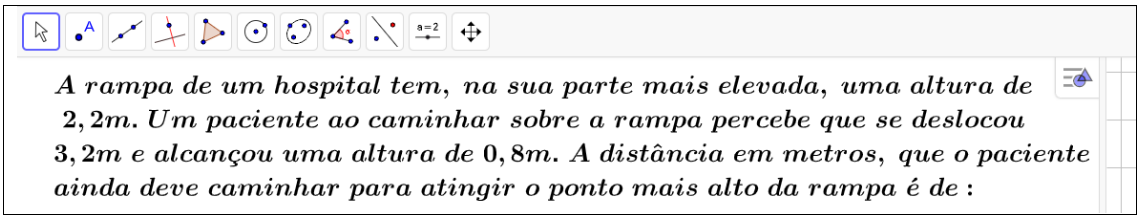
Sendo assim, entendemos que a ação mediadora do professor em mostrar possíveis interações dos registros de tratamento e conversão, fornecem elementos de aprendizagens para os alunos e também instrumentos para o acompanhamento dessas aprendizagens.

# 3 OS PROBLEMAS GERADORES

## 3.1 *Os Problema Geradores - Aluno*

***Problema 1*[1]*:*** A rampa de um hospital tem, na sua parte mais elevada, uma altura de 2,2 m. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 m e alcançou uma altura de 0,8 m. A distância em metros, que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é de:

Para a versão digital, acessar o *link* na plataforma do *Geogebra* em: https://www.geogebra.org/m/uptp9xj7, ilustrado a seguir:




Fonte: arquivo do pesquisador.

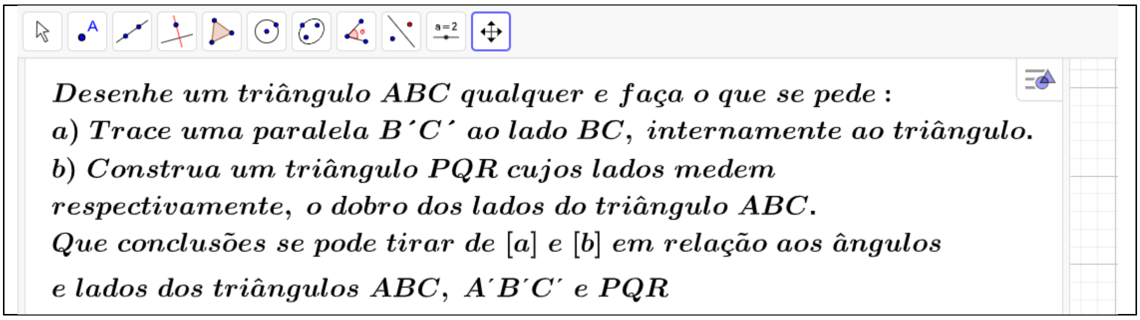
***Problema 2*[2]*:*** Desenhe um triângulo ABC qualquer e faça o que se pede:

a) Trace uma paralela B´ C´ ao lado BC, internamente ao triângulo.

b) Construa um triângulo PQR cujos lados medem respectivamente, o dobro dos lados do triângulo ABC.

Que conclusões se pode tirar de [a] e [b] em relação aos ângulos e lados dos triângulos ABC, A´ B´ C´ e PQR?

Para a versão digital, acessar o *link* na plataforma do Geogebra em: https://www.geogebra.org/m/ykvdbed7, ilustrado a seguir:



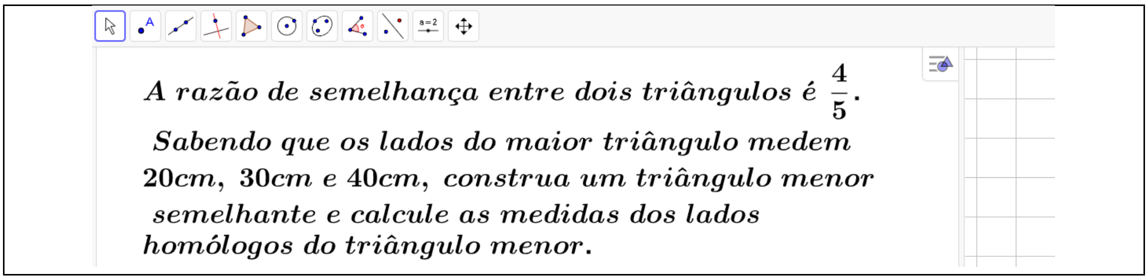

[1] Caderno Aprender Sempre, pág. 2011, vol. 1, parte 2.

[2] O problema foi extraído de Nunes 2010.

Fonte: arquivo do pesquisador.

***Problema 3*[3]*:*** A razão de semelhança entre dois triângulos é $\frac{4}{5}$. Sabendo que os lados do maior triângulo medem 20 cm, 30 cm e 40 cm, construa um triângulo menor semelhante e calcule as medidas dos lados homólogos do triângulo menor.

Para a versão digital, acessar o *link* na plataforma do *Geogebra* em: https://www.geogebra.org/classic/jusvurky, ilustrado a seguir:




Fonte: arquivo do pesquisador.

***Problema 4.*** A partir da imagem, elaborar um problema envolvendo a Semelhança de Triângulos.


Fonte: arquivo do pesquisador[4].

[3] O problema foi extraído e adaptado do livro: MATEMÁTICA - Compreensão e Prática, 2015, p. 156.
[4] Arquivo do pesquisador em: https://www.geogebra.org/m/kw26cb86.

### 3.2 *Os Problema Geradores* - Professor

Para a aplicação das atividades em sala de aula, sugerimos consultar os links dos problemas para orientar os alunos quanto ao propósito do uso do ambiente digital do *Geogebra* e da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas para a implementação das 10 etapas da Metodologia. Salientamos a necessidade do uso do *software Geogebra* para resolver os problemas de maneira simultânea entre a parte algébrica e a geométrica. A resolução simultânea ajuda na compreensão das transformações de tratamento e conversão, o que não é possível observar e perceber nos materiais estáticos, materiais impressos e cadernos.

Em nossa experiência na aplicação desses problemas, mesmo o professor e os alunos que ainda não tenham contato com o *software Geogebra,* de modo algum não é um impedimento para usá-lo, e sim oportunidade para introduzi-lo como recurso tecnológico para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Os links disponibilizados dão acesso aos problemas com as suas respectivas resoluções na versão do professor na plataforma do *Geogebra* no modo passo a passo a partir dos seletores “Passos” de construção. A seguir, o passo a passo e os comandos que direciona o aluno as atividades:

- 1º - Digitar o *link* de acesso do problema em um buscador de internet, ou compartilhar os links a partir deste produto acadêmico.
- 2º - Após a visualização do problema na plataforma, clique nos três pontos na parte superior do lado direito e clique em “*Abrir com o Geogebra App*”.
- 3º - Os alunos resolvem o problema, e em seguida salvam o problema clicando nos três traços do canto superior à direita.
- 4º - Em seguida, clique em “Gravar”, nomear a atividade e novamente clicar em gravar. Automaticamente o problema resolvido é salvo na conta/página criada.

Após essa sequência de comandos, o problema é gravado na conta/página do professor ou aluno e pode ser editado a qualquer momento e também pode ser compartilhado. Para salvar a atividade online, é necessário que tenha uma conta na plataforma do *Geogebra*. Para criar uma conta, recomendamos assistir o vídeo no youtube no link a seguir: https://www.youtube.com/watch?v=N0MKFONYmt4.

A seguir, apresentamos a resolução dos três problemas de Semelhança de Triângulos, e o 4º problema como sugestão para a elaboração de um novo problema a partir de uma imagem pelos alunos.

***Problema 1:*** A rampa de um hospital tem, na sua parte mais elevada, uma altura de 2,2 m. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 m e alcançou uma altura de 0,8 m. A distância em metros, que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é de:

Para a versão digital acessar o link na plataforma do Geogebra em: https://www.geogebra.org/m/uptp9xj7.

**Habilidades a serem desenvolvidas:**

- EF06MA23 - Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros;
- EF09MA12 - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

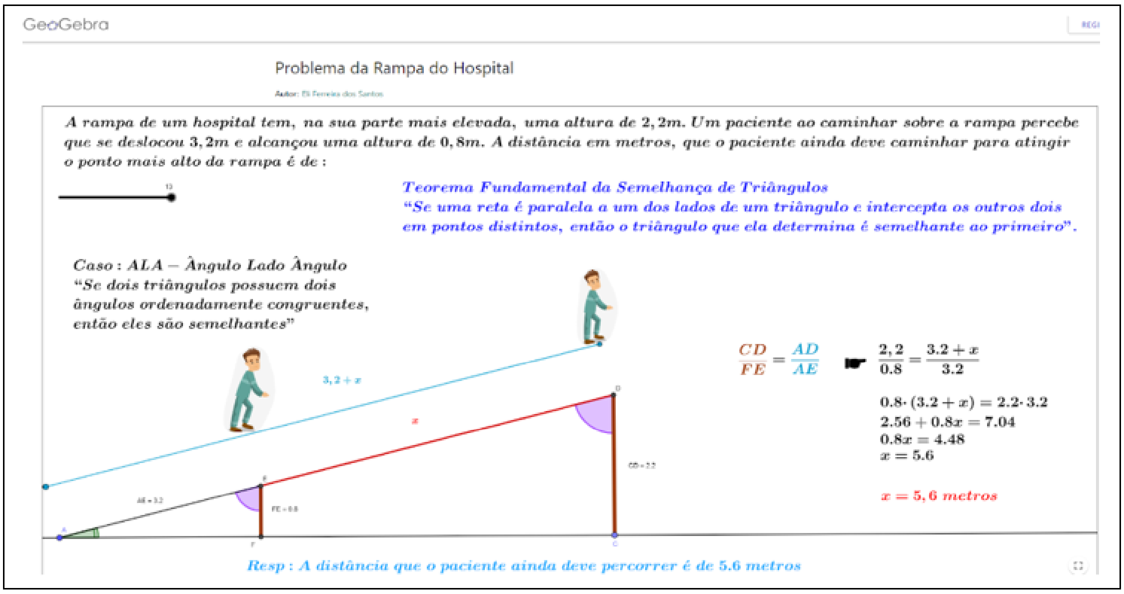
**Objetivos**

- Identificar e aplicar o caso de semelhança de triângulos em situações-problema; calcular a razão entre segmentos proporcionais
- Reconhecer triângulos semelhantes.

**Conteúdos abordados**

- Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares;
- Semelhança de triângulos.

A seguir a resolução do problema 1 no *Geogebra*.




Fonte: arquivo do pesquisador.

**Comentários**

Professor, este problema busca a transformação da linguagem natural em linguagem figural, algébrica e geométrica. Observar os alunos como compreendem e apresentem as soluções no momento das etapas 6 e 7, e questionando-os acerca da resolução simultânea e do modo tradicional e costumeiro das aulas de Matemática. A solução do problema é indicada para ser apresentada na etapa 9 da formalização dos conteúdos. O *Geogebra* facilita a visualização das transformações de tratamento e conversão simultaneamente. Para a extensão do problema pode ser trabalhado o teorema de Pitágoras, para calcular a medida do comprimento da base.

***Problema 2:*** Desenhe um triângulo ABC qualquer e faça o que se pede:

a) Trace uma paralela B´ C´ ao lado BC, internamente ao triângulo.

b) Construa um triângulo PQR cujos lados medem respectivamente, o dobro dos lados do triângulo ABC.

Que conclusões se pode tirar de [a] e [b] em relação aos ângulos e lados dos triângulos ABC, A´ B´ C´ e PQR?

Para a versão digital acessar o link na plataforma do Geogebra em: [https://www.geogebra.org/m/ykvdbed7.](https://www.geogebra.org/m/ykvdbed7)

**Habilidades a serem desenvolvidas**:

- (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
- EF07MA23 - Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem o uso de software de geometria dinâmica
- EF09MA12 - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

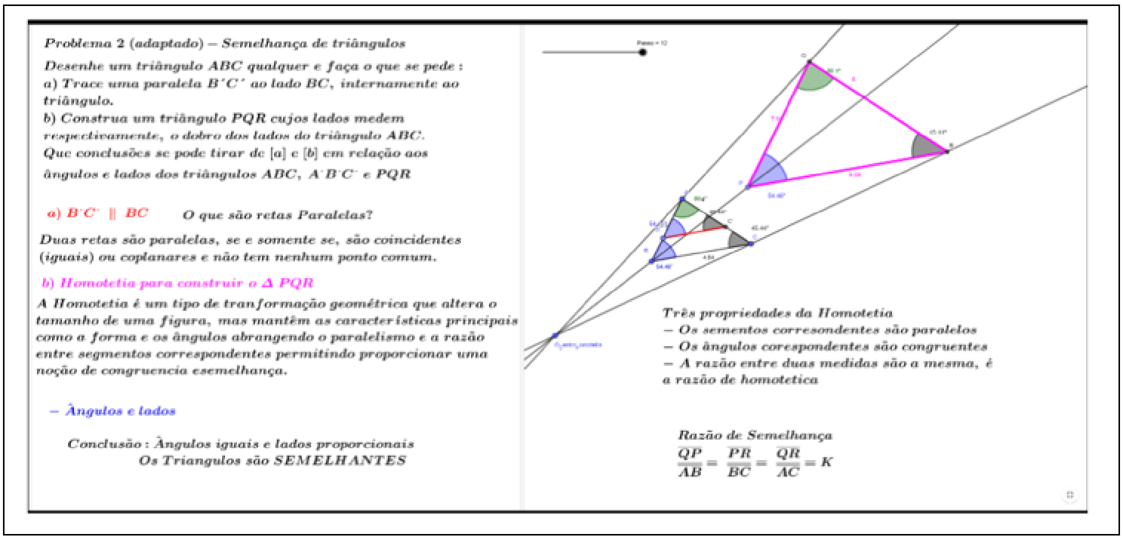
**Objetivos**

- Definir triângulos semelhantes; reconhecer critérios de semelhança; trabalhar as propriedades relacionadas a semelhança de triângulos utilizando o Teorema das Paralelas.

**Conteúdos abordados**

- Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas;
- Relações entre os ângulos formados por retas paralelas interceptadas por uma transversal;
- Semelhança de triângulos.

A seguir a resolução do problema no *Geogebra*.




Fonte: arquivo do pesquisador.

**Comentários**

Professor, esse problema foi escolhido porque apresenta na sua resolução as condições para abordar os três casos de Semelhança de Triângulos. Oportuniza a introdução do conceito de homotetia, ampliação e redução de figuras. Com o uso da ferramenta de animação do *Geogebra* os alunos podem visualizar e perceber as relações dos lados e ângulos dos três triângulos construídos. A solução do problema é indicada para ser apresentada na etapa 9 da formalização dos conteúdos envolvidos na resolução. Nessa apresentação do *Geogebra* os alunos podem ser questionados no que ocorre quando se altera as medidas dos lados dos triângulos e o que ocorre com os ângulos. Para extensão do problema pode ser problematizado com a construção de outras figuras e se observa a semelhança.

***Problema 3:*** A razão de semelhança entre dois triângulos é $\frac{4}{5}$. Sabendo que os lados do maior triângulo medem 20 cm, 30 cm e 40 cm e, construa um triângulo menor semelhante e calcule as medidas dos lados homólogos do triângulo menor.

Para a versão digital acessar o link na plataforma do Geogebra em: https://www.geogebra.org/m/bvvzeerf.

**Habilidades a serem desenvolvidas**:

- EF06MA21 - Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais;
- EF09MA12 - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

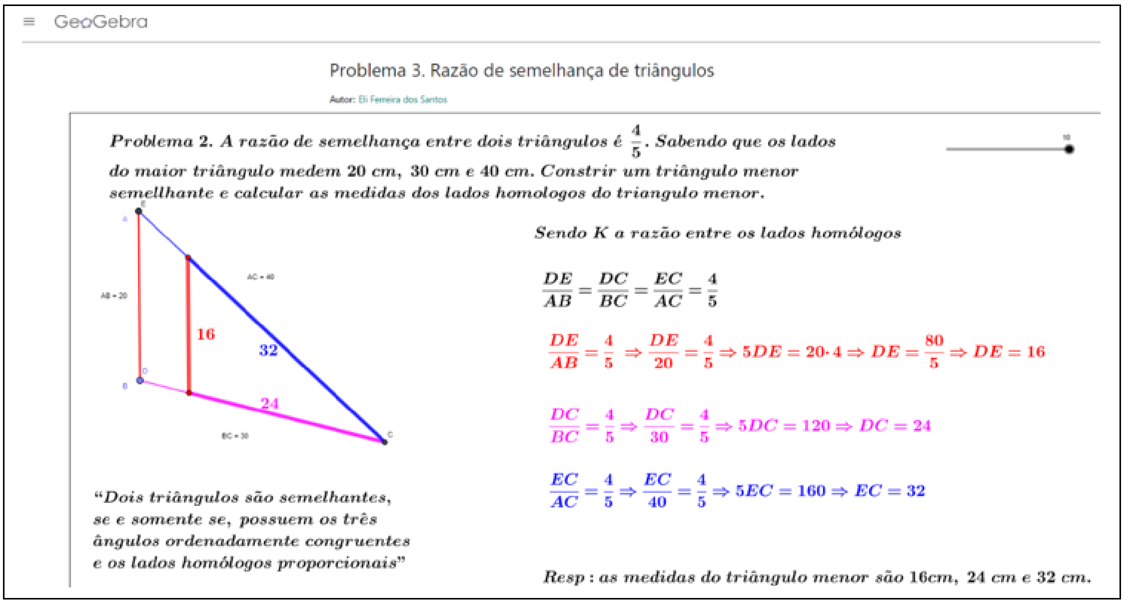
**Objetivos**

- Definir triângulos semelhantes; reconhecer critérios de semelhança por redução e ampliação de figura; reconhecer triângulos semelhantes.

**Conteúdos abordados**

- Razão de semelhança;
- Semelhança de triângulos;
- Homotetia.

A seguir a resolução do problema no *Geogebra*.




Fonte: arquivo do pesquisador.

**Comentários**

Professor, nesse problema é muito importante observar como os alunos interpretam a razão em relação as medidas entre os dois triângulos. Em nossa experiência na aplicação desse problema, os alunos construíram triângulos separados, e esse tipo de construção pode dificultar a percepção da semelhança. É importante observar se realizam as representações de tratamento e conversão, para que a aprendizagem não fique incompleta (Duval, 2009). Essa solução do problema é indicada para ser apresentada na etapa 9 da formalização dos conteúdos envolvidos na resolução. Para a extensão ou criar um novo problema pode-se apresentar dois triângulos e os alunos criarem um enunciado e a sua resolução.

**Problema 4.** A partir da imagem, elaborar um problema sobre Semelhança de Triângulos.

Para a versão digital acessar o link na plataforma do Geogebra em: https://www.geogebra.org/m/kw26cb86.

*A partir da imagem, elaborar um problema sobre Semelhança de Triangulos*


Fonte: arquivo do pesquisador.

**Comentários**

Professor, o objetivo desse problema é propor aos alunos a elaboração de novos problemas a partir dos problemas geradores resolvidos, utilizando essa imagem, (etapa 10) da Metodologia. Para essa situação, adotamos a abordagem de Possamai e Allevato (2022) e optamos pela aplicação após a resolução dos problemas resolvidos envolvendo a Semelhança de Triângulos. Essa etapa desafia os alunos a colocarem em prática aquilo que foi trabalhado e discutido em sala de aula.

Para a elaboração do problema foi dado os seguintes comandos:

- Elaborar e resolver um problema sobre a Semelhança de Triângulos a partir da imagem;
- Fazer a releitura dos três problemas geradores resolvidos anteriormente, como repertório para colaborar nessa produção.
- Utilizar o Geogebra ou a folha de atividade impressa na elaboração e resolução do problema.

Para a correção e análise da elaboração dos problemas, foram adotados os seguintes critérios pré-estabelecidos:

- O problema é adequado à imagem e ao conteúdo determinado?
- O enunciado do problema tem clareza?
- O problema tem uma pergunta?
- Os dados do problema respeitam minimamente as proporções do espaço?
- A solução encontrada é adequada à pergunta e a imagem?
- Foi evidenciado as representações de tratamento e conversão?
- O problema tem aproximação com quais problemas geradores resolvidos?
- Para essas resoluções, os alunos utilizaram qual recurso? *Geogebra* ou folha de atividade?

Nesse percurso, espera-se que os alunos elaboram novos problemas a partir da imagem ou de outras situações de aprendizagem, tendo como referência os problemas geradores resolvidos anteriormente. Pode-se pedir a resolução ou somente o problema elaborado para outro grupo resolvê-lo. A imagem é rica em detalhes e pode-se usar o recurso do clareamento da imagem do *Geogebra* para os alunos visualizarem a malha quadriculada no pano de fundo como orientação para as construções dos objetos. Para a aplicação dessa etapa, pode optar em qual momento desejar, se antes, durante ou depois de resolver um problema gerador. Para isso, levar em consideração a dificuldade do conteúdo aliada com a intencionalidade da proposta de ensino que deseja alcançar. Orientamos para que a apresentação dos critérios de correção ocorra somente após a entrega das atividades para não induzirem os alunos para uma situação desejada. Essa etapa é o fechamento de todo o processo da aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação, e, a partir dela inicia-se novamente todo o processo.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino da Matemática com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, cria condições para os alunos serem protagonistas da sua própria aprendizagem. A implementação das 10 etapas dessa Metodologia não deve ser tratada como uma sequência rígida, pois, algumas etapas podem ser fundidas em outras.

No decorrer da resolução dos problemas, percebemos que o envolvimento individual dos alunos e a interação entre eles nas aulas foram sendo ampliados, juntamente com a postura de mediador do conhecimento adotado pelo pesquisador. Para a utilização dessa Metodologia, recomendamos o uso do *software Geogebra* como ferramenta de apoio para resolver problemas em um ambiente digital. Concordamos com Nóbriga (2015) que o uso desse *software* nas aulas de Matemática traz um dinamismo que não pode ser observado nos materiais estáticos, livros e cadernos. O *software* apresenta o recurso da resolução simultânea, e o aluno passa a visualizar a mudança na janela algébrica e observando simultaneamente o que ocorre na janela geométrica. Conforme Duval (2009), é necessário que o aluno realize as transformações de tratamento e conversão do mesmo objeto, para que o processo de aprendizagem não fique incompleto.

Nas representações semióticas, o tratamento é uma transformação da representação interna de um registro, enquanto que a conversão é uma transformação externa. Percebemos em nosso trabalho que a conversão é a transformação do objeto estudo, quando apresentou a mudança de registro da representação algébrica para a representação geométrica, os alunos conseguiram ver simultaneamente, e começaram a estabelecer novas relações com o conhecimento matemático e que ele não se dá de maneira isolada. Nesse sentido, o pesquisador ao ensinar foi conduzindo os alunos a perceberem que as transformações de um mesmo objeto requerem evidenciar os conceitos de cada representação, o que não é algo mecânico. Sendo assim, acreditamos que a ação mediadora do professor ao observar os registros de tratamento e conversão realizados pelos alunos fornecem indicativos para a aquisição do conhecimento.

Enfim, o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação, juntamente com as interações proporcionadas pelo *software Geogebra* e as representações semióticas de tratamento e conversão, aliadas com a ação mediadora do professor podem melhorar o ensino e a aprendizagem do conteúdo de Razão e Semelhança de Triângulos.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2018

DUVAL, R. **Semioses e Pensamento Humano. Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira, Ed. Livraria da Física, São Paulo - São Paulo, 2009.

HENRIQUES, A; ALMOULOUD, S. A: **Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple.** SciELO, Ciênc. Educ., Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, https://doi.org/10.1590/1516-731320160020012, 2016.

NÓBRIGA, J. C. C: **GGBOOK: UMA PLATAFORMA QUE INTEGRA O SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA GEOGEBRA COM EDITOR DE TEXTO E EQUAÇÕES A FIM DE PERMITIR A CONSTRUÇÃO DE NARRATIVAS MATEMÁTICAS DINÂMICAS**. 2015. Tese de Doutorado. UNB. Brasília. Goiás.

ONUCHIC, L. R: ALLEVATO, N. S. G: **ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA: POR QUE ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS?** RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS- Teoria e Prática, In ONUCHIC, L. L. R: *eat. al*. (Org). RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - Teoria e Prática, 2ª ed.- Jundiaí-SP: Paco Editorial, 2021.

POSSAMAI, J. P; ALLEVATO, N. S. G: **Proposição - Formulação/Elaboração de Problemas**. https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/4726/5133 v. 66, n. 12, p.1-28, 2022, p. 20

SANTOS, E. F: **A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE RAZÃO E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS SOB A PERSPECTIVA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE DUVAL.** 2023. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2023.